基于大小限制观念的复数集合论

薄谋

兰州大学

2020年11月12日

内容提要

整体思路

- 研究范围：集合论基础 (Foundations of Set Theory)；
- 研究工具：复数逻辑、模态逻辑、时态逻辑。

参考书目

- Stewart Shapiro, Foundations Without Foundationism : A Case For Second-Order Logic, Oxford: Clarendon Press, 1991.
- David Lewis, Parts of Classes, Oxford: Blackwell, 1991.
- Alex Oliver and Timothy Smiley, Plural Logic, Oxford: Oxford University Press, 2012.
- Luca Incurvati: Conceptions of Set and The Foundations of Mathematics, Cambridge University Press, 2020.

为集合论公理辩护

不管是迭代概念还是大小限制概念都是为集合论公理辩护。

- 首先，我们用阶段理论体现迭代概念；
- 其次，我们用大小限制概念修正弗雷格的第五基本定律。

阶段理论的语言

二类一阶语言 $\mathcal{L}$:

- $x, y, z, \ldots$ 表示集合;
- $r, s, t, \ldots$ 表示阶段。

阶段理论语言谓词

共有三个二位谓词：

- 用 $<$ 表示...早于...，这是阶段-阶段谓词；
- 用 F 表示...在...阶段形成，这是集合-阶段谓词；
- 用 $\in$ 表示 ... 属于 ... ，这是集合-集合谓词。

阶段理论的公理

- $\forall t \forall s \forall r(t < s \wedge s < r \to t < r)$;
- $\forall t \forall s \exists r(t < r \wedge s < r)$;
- $\exists r(\exists t\ t < r \wedge \forall t(t < r \to \exists s(t < s \wedge s < r)))$;
- $\forall x \exists s xFs$;
- $\forall x \forall s(xFs \to \forall t(t < r \to \exists(t < s \wedge s < r))$;
- $\exists s \forall y(A(y) \to yBs) \to \exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow A(y))$.

使用阶段理论推导集合论公理

使用阶段理论我们能得到除去外延公理和选择公理的策梅洛集合论的所有公理。

- 能得到：空集、对集、正则性、分离、无穷、幂集；
- 得不到：外延、选择、替换。

弗雷格的第五基本定律

- 每个概念 F 都有一个对象 $'F$;
- 概念是共延的当且仅当概念外延是恒等的:
  $'F =' G \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$;
- 罗素悖论表明第五基本定律不协调。

使用大小限制概念对第五基本定律的修正

大小限制观念要归功于康托尔、罗素、冯诺依曼和伯奈斯。

- 包含太多元素的对象或者不属于任何事物，或者不存在。
- 把大小限制加入第五基本定律后，过剩概念都是恒等的。

核心概念

- 概念 F 进入概念 G 当且仅当归入 F 的对象与归入 G 的某些或者全部对象处于 1-1 对应关系 。
- 令 V 是概念 $[x : x = x]$，所有对象都归入 V。每个概念进入 V。概念 F 是小的当 V 不进入 F。
- 概念 F 和概念 G 是共延的当相同对象归入 F 和 G，也就是 $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$。F 类似于 G 当且仅当或者 F 和 G 两者都不是小的或者 F 和 G 是共延的，也就是 $F \sim G$ 当且仅当 $Sm(F) \vee Sm(G) \rightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx))$。
- 我们把与任意概念相联系的对象 $^*F$ 称为 F 的对向 (subtension) 或者外延。

新第五基本定律

- 布劳斯版本：$\forall F \forall G({}^*F = {}^*G$ 当且仅当 $F \sim G)$.
- 通用版本：$\forall F \forall G({}^*F = {}^*G$ 当且仅当 $Sm(F) \vee Sm(G) \to \forall x(Fx \leftrightarrow Gx))$.

弗雷格-冯诺依曼逻辑系统

该系统由两个要素构成。

- 标准公理化二阶逻辑。
- 新第五基本定律。

FN 系统能证明的集合论公理

该系统由两个要素构成。

- 能得到：空集、对集、选择、替换、分离、正则、并集。
- 得不到：无穷、幂集。

布劳斯的论断

简单总结：

- 全部公理既不能从迭代概念也不能从大小限制推导出来。
- 在集合论背后至少存在两种思想。

两种集合

两种集合分别是：

- 我们把 $\in_Z$ 当作原始项而且把相关集合论的集合称为 Z-集合。
- 我们把 $\in_V$ 当作新第五基本定律的被定义关系而且把新第五基本定律的集合称为 V-集合。

夏皮罗的工作加强了布劳斯的论断

具体为：

- 把二阶迭代集合论和新第五基本定律结合起来，迭代概念和大小限制概念有相同的结构。
- 替换公理和选择公理在 Z-集合上成立；无穷公理和幂集公理在纯粹 V-集合上成立。
- 集合是纯粹的当该集合，该集合的元素，该集合元素的元素等等全都是集合。
- 当代集合概念是迭代概念和大小集合概念的混合物。

梅伯里的建议

- 最好根据合成 (composition) 关系解释集合概念;
- 合成关系在一个事物和多个事物间成立;
- 我们把这种关系成为 m-合成。

合成原则 (1)

- 给定任意事物，如果它们是数量有限的，那么某个事物是由它们 m-组成的；
- $\forall X(f(x) \longrightarrow \exists a \Leftarrow X)$;
- $\forall X$ 是复数全称量词，f 表示数量上有限的性质，$\Leftarrow$ 是 m-合成。

合成原则 (2)

集合是外延复数性。

- 由相同事物 m-组成的事物是相同的；
- $\forall a, b(\exists X(a \Leftarrow X \wedge b \Leftarrow X) \longrightarrow a = b)$。

合成原则(3)

这是合成原则 (1) 的逆命题：

- 如果某个事物是由某些事物 m-组成的，那么这些事物是数量有限的；
- $\forall X(\exists a\, a \Leftarrow X \longrightarrow f(X))$.

合成原则 (4)

- 由某些事物 m-组成的某个事物不是由其他事物 m-组成的；
- $\forall X, Y(\exists a(a \Leftarrow X \wedge a \Leftarrow Y) \longrightarrow X = Y)$。

单个集合合成原则

结合原则 (1) 和 (3)，形成单个集合合成原则：

$\forall X \exists a\ a \Leftarrow X \leftrightarrow f(X)$。

单个集合恒等原则

结合原则 (2) 和 (4)，形成单个集合恒等原则：

$$\forall a, b \forall X, Y((a \Leftarrow X \wedge b \Leftarrow Y) \longrightarrow (a = b \leftrightarrow X = Y))。$$

为两个声称辩护

- 大小限制推理生成足够多的集合以满足大多数数学家的需求；
- 使用合成理论对布劳斯的迭代集合论和伯齐聚集理论的分析，发现集合形成与分体论融合共享足够多的逻辑特征。

为两个声称辩护

- 大小限制推理生成足够多的集合以满足大多数数学家的需求；
- 使用合成理论对布劳斯的迭代集合论和伯齐聚集理论的分析，发现集合形成与分体论融合共享足够多的逻辑特征。

两个目标

- 使用基于大小限制观念的复数集合论谈论数学对象；
- 使用大小限制推理生成丰富的集合论定域，足以容纳小于 $\beth_\omega$ 的所有冯诺依曼序数。

伯奈斯-布劳斯集合论

- 伯奈斯-布劳斯集合论的背景逻辑是布劳斯的复数逻辑；
- 伯奈斯-布劳斯集合论唯一的集合存在性公理是伯奈斯的反射原则。

BB的优点

- 它是非常简单的公理系统；
- 得到 ZFC 的通常公理，某些大基数；
- 把复数逻辑的每个问题还原到集合论的问题。

复数逻辑的记法(1)

- 复数变元 xx, yy, zz;
- 复数量词 $\exists\exists$、$\forall\forall$，$\exists\exists xx$、$\forall\forall xx$ 分别读作" 存在某些对象，xs"、"'对任意对象，xs';
- 用 $u \propto xx$ 表示"u 是 xs 的一个" 。

复数逻辑的记法(2)

- 我们用 $xx == yy \leftrightarrow \forall u(u \propto xx \leftrightarrow u \propto yy)$ 表示"xs 与 ys 相同"；
- 我们用 $\text{ß}u$ 表示"'u 是一个集合'。
- 我们用 $u \equiv xx$ 表示"u 是 xs 的集合"。

两条公理

- 遗传公理：$\text{ß}u \leftrightarrow \exists xx(u \equiv xx)$;
- 外延公理：
  $u \equiv xx \wedge v \equiv yy \rightarrow (u = v \leftrightarrow xx == yy)$。

伯吉斯的总结

The plural logic of Boolos and the reflection principle of Bernays, though introduced independently, the one decades after the other, turn out to be ideally suited to each other. The combination of the two is a marriage made in heaven-or at least, in Cantor's paradise.

布劳斯的复数逻辑与伯奈斯的反射原则是天作之合!

林内波的工作

- 林内波认为集合的累计分层不是实在的 (actual) 而是潜在的(potential);
- 发展一种包含集合潜在概念的模态集合论;
- 模态集合论与 ZFC 是等协调的。

斯塔德的工作

- 在双模态语言中发展出模态阶段理论 MST;
- 模态阶段理论加某些条件能解释 ZFC;
- 模态阶段理论与数学实践和集合的可行形而上学是一致的。

谢谢观看！