数学直觉

从康德到当代认知科学

高坤

山西大学科哲中心
CACML 2020

1 康德式数学直觉

2 哥德尔式数学直觉

3 认知科学中的相关研究

4 数学直觉自然化

康德式数学直觉

- 数学知识基于心灵的两种先天直观——时间和空间，它们是经验直观的普遍形式条件，分别对应算术和几何知识。

康德式数学直觉

- 数学知识基于心灵的两种先天直观——时间和空间，它们是经验直观的普遍形式条件，分别对应算术和几何知识。
- 数学推理不是纯逻辑的推理，它“自始至终受直观引导”，本质上涉及在先天直观中构造数学概念。例如，三角形内角和等于两直角之和，此结论并非来自三角形概念的纯粹分析，而是来自在我们的空间直观中控制三角形构造的普遍条件。再如，$7+5=12$。

康德式数学直觉

- 数学知识基于心灵的两种先天直观——时间和空间，它们是经验直观的普遍形式条件，分别对应算术和几何知识。
- 数学推理不是纯逻辑的推理，它“自始至终受直观引导”，本质上涉及在先天直观中构造数学概念。例如，三角形内角和等于两直角之和，此结论并非来自三角形概念的纯粹分析，而是来自在我们的空间直观中控制三角形构造的普遍条件。再如，$7+5=12$。
- 数学知识是先天综合的。

评论

- 康德式数学直觉不指向独立于心灵的外部数学对象，也不直接提供“关于数学的直觉信念”，而是心灵的一种主动塑造能力，为数学推理这种心灵活动提供条件和限制。数学知识本质上是一种自我知识，虽然它对一切可能的经验对象普遍有效。

评论

- 康德式数学直觉不指向独立于心灵的外部数学对象，也不直接提供“关于数学的直觉信念”，而是心灵的一种主动塑造能力，为数学推理这种心灵活动提供条件和限制。数学知识本质上是一种自我知识，虽然它对一切可能的经验对象普遍有效。
- 康德式数学直觉包含或预设一种深刻的算术-几何二分法。

评论

- 康德式数学直觉不指向独立于心灵的外部数学对象，也不直接提供“关于数学的直觉信念”，而是心灵的一种主动塑造能力，为数学推理这种心灵活动提供条件和限制。数学知识本质上是一种自我知识，虽然它对一切可能的经验对象普遍有效。
- 康德式数学直觉包含或预设一种深刻的算术-几何二分法。
- 布劳威尔等直觉主义者继承了康德的主观主义，但抛弃了算术-几何二分法。

哥德尔式数学直觉

- 数学直觉与感官知觉平行，都指向心灵之外的客观对象，区别在于，前者指向超时空的抽象对象，后者指向时空中的可感物理对象。

哥德尔式数学直觉

- 数学直觉与感官知觉平行，都指向心灵之外的客观对象，区别在于，前者指向超时空的抽象对象，后者指向时空中的可感物理对象。
- 数学推理并不限于演绎推理，某种归纳法也适用，特别是在为公理作辩护时。比如，公理本身不直观，但可以导出很多符合直觉的结论。

哥德尔式数学直觉

- 数学直觉与感官知觉平行，都指向心灵之外的客观对象，区别在于，前者指向超时空的抽象对象，后者指向时空中的可感物理对象。
- 数学推理并不限于演绎推理，某种归纳法也适用，特别是在为公理作辩护时。比如，公理本身不直观，但可以导出很多符合直觉的结论。
- 数学直觉直接提供信念，但并非不可错。它可以反复运用，是可发展的，不可穷尽的。

评论

- 数学直觉的对象是外延性的存在（对象），还是内涵性的存在（概念）?

评论

- 数学直觉的对象是外延性的存在（对象)，还是内涵性的存在（概念)？
- 数学知识是后天分析的?

认知科学研究的必要性

- 解释数学这种人类活动，应当尊重人们的实际数学经验。

认知科学研究的必要性

- 解释数学这种人类活动，应当尊重人们的实际数学经验。
- 一般认为，直觉是不经过有意识的推理、直接做出判断或产生信念的能力，与理性分析、推理、反思等相对，哲学思辨方法或概念分析对于说明它都存在固有局限。

认知科学研究的必要性

- 解释数学这种人类活动，应当尊重人们的实际数学经验。
- 一般认为，直觉是不经过有意识的推理、直接做出判断或产生信念的能力，与理性分析、推理、反思等相对，哲学思辨方法或概念分析对于说明它都存在固有局限。
- 数理逻辑、数学基础研究对数学认识论的贡献也有局限。比如，几何算术化，经典数学的集合论归约等，都只是逻辑推理的还原，不是直觉的还原。

主要成果

- 数学认知功能的脑区定位，例如，顶内沟（intra-parietal sulcus）作为数量感官（S. Dehaene: the number sense）。

主要成果

- 数学认知功能的脑区定位，例如，顶内沟（intra-parietal sulcus）作为数量感官（S. Dehaene: the number sense）。
- 婴儿（以及一些动物）展示出先天的（innate）数量认知能力：区别于计数和估数的感数 (subitizing) 能力；估数系统（ANS）。

主要成果

- 数学认知功能的脑区定位，例如，顶内沟（intra-parietal sulcus）作为数量感官（S. Dehaene: the number sense）。
- 婴儿（以及一些动物）展示出先天的（innate）数量认知能力：区别于计数和估数的感数 (subitizing) 能力；估数系统（ANS）。
- 数学概念的表征和加工机制与特点。

数学概念的表征和加工

- 空间-运动表征的基础性。
  比如，空间忽视患者对数量关系也会发生错误表征（线段中位点与数量区间中位数实验）；SNARC 效应；神经影像证据。
  Narayanan 等研究表明，控制身体运动的神经机制同样也能执行关于一般动作或事件结构的逻辑推理。

数学概念的表征和加工

- 空间-运动表征的基础性。
比如，空间忽视患者对数量关系也会发生错误表征（线段中位点与数量区间中位数实验）；SNARC 效应；神经影像证据。
Narayanan 等研究表明，控制身体运动的神经机制同样也能执行关于一般动作或事件结构的逻辑推理。
- 抽象数学概念主要通过概念隐喻来表征、加工（George Lakoff, Rafael Nuñez）。

概念隐喻

- 概念隐喻是从来源域到目标域的映射，其功能在于将来源域概念的语词和推理结构投射到目标域的概念上。

概念隐喻

- 概念隐喻是从来源域到目标域的映射，其功能在于将来源域概念的语词和推理结构投射到目标域的概念上。
- 特别地，抽象经验往往通过基于感觉运动经验的概念隐喻被概念化。比如，知道即看见，爱即温暖，原因即力等。数学中，递归与重复动作，导数与运动、靠近边界。

例子：集合概念的隐喻加工

- 图像模式（image schema）：一种重要的概念基元（primitive），它既是知觉的，又是概念的，是所有空间关系概念的基础。例如容器、接触、动体-界标、起点-路径-目的地等。

例子：集合概念的隐喻加工

- 图像模式（image schema）：一种重要的概念基元（primitive），它既是知觉的，又是概念的，是所有空间关系概念的基础。例如容器、接触、动体-界标、起点-路径-目的地等。
- 容器模式：包含内部、外部和边界三部分，构成一个格式塔整体。

例子：集合概念的隐喻加工

- 图像模式（image schema）：一种重要的概念基元（primitive），它既是知觉的，又是概念的，是所有空间关系概念的基础。例如容器、接触、动体-界标、起点-路径-目的地等。
- 容器模式：包含内部、外部和边界三部分，构成一个格式塔整体。
- 集合即容器，集合论基本术语来自空间关系术语，基本命题来自容器相关的空间关系事实。

关于数学直觉的两个区分

- intuition of / intuition that

关于数学直觉的两个区分

- intuition of / intuition that
- justificational intuition / heuristic intuition (证成与发现)
  前者应当是公共的，正常发育的大脑都具备且个体间无显著差异；后者个体差异显著，依赖于经验积累和训练。

自然化数学直觉及其后果

- 通过概念隐喻，justificational intuition 可还原为感觉运动系统的直观，特别是图像模式的直观。在某种意义上，它既是 intuition of，又是 intuition that。

自然化数学直觉及其后果

- 通过概念隐喻，justificational intuition 可还原为感觉运动系统的直观，特别是图像模式的直观。在某种意义上，它既是 intuition of，又是 intuition that。
- heuristic intuition 基本可归结为一种模式识别能力，可快捷且常常有效的达到真，背后是复杂的神经元网络计算。

自然化数学直觉及其后果

- 通过概念隐喻，justificational intuition 可还原为感觉运动系统的直观，特别是图像模式的直观。在某种意义上，它既是 intuition of，又是 intuition that。
- heuristic intuition 基本可归结为一种模式识别能力，可快捷且常常有效的达到真，背后是复杂的神经元网络计算。
- 数学形式化一般意味着感觉运动性直观的语言化、符号化、逻辑化，这种形式化并不意味着直观可消除，数学知识的习得本质上依赖于自然化数学直觉。

自然化数学直觉及其后果

- 通过概念隐喻，justificational intuition 可还原为感觉运动系统的直观，特别是图像模式的直观。在某种意义上，它既是 intuition of，又是 intuition that。
- heuristic intuition 基本可归结为一种模式识别能力，可快捷且常常有效的达到真，背后是复杂的神经元网络计算。
- 数学形式化一般意味着感觉运动性直观的语言化、符号化、逻辑化，这种形式化并不意味着直观可消除，数学知识的习得本质上依赖于自然化数学直觉。
- 自然化数学直觉不指向心灵外的抽象对象，也不是康德意义上的先天直观，更接近希尔伯特的直觉观。

自然化数学直觉及其后果

- 通过概念隐喻，justificational intuition 可还原为感觉运动系统的直观，特别是图像模式的直观。在某种意义上，它既是 intuition of，又是 intuition that。
- heuristic intuition 基本可归结为一种模式识别能力，可快捷且常常有效的达到真，背后是复杂的神经元网络计算。
- 数学形式化一般意味着感觉运动性直观的语言化、符号化、逻辑化，这种形式化并不意味着直观可消除，数学知识的习得本质上依赖于自然化数学直觉。
- 自然化数学直觉不指向心灵外的抽象对象，也不是康德意义上的先天直观，更接近希尔伯特的直觉观。
- 自然化数学直觉有力支持数学反实在论（justificational intuition 并不真的是 justification for truth）。

谢 谢!